

Una experiencia docente de trabajos en equipo en Matemática Discreta

Gregorio Hernández Peñalver¹
gregorio.hpenalver@upm.es

¹Departamento de Matemática Aplicada
Facultad de Informática, UPM
Boadilla del Monte, Madrid (España)

Resumen— Se describe una experiencia en trabajo colaborativo desarrollada en la asignatura Matemática Discreta en Ingeniería Informática.

Palabras clave: Trabajo en equipo, Matemática Discreta.

INTRODUCCIÓN

El trabajo en equipo constituye una herramienta docente muy valiosa que permite desarrollar destrezas y habilidades del alumno, tanto en su colaboración con los restantes miembros del equipo de trabajo como en su propio y particular aprendizaje.

En este trabajo se presenta la experiencia desarrollada en los últimos cuatro cursos, desde el 2007-08 hasta el actual 2010-11, en la materia Matemática Discreta de primer curso de la Facultad de Informática. En los años transcurridos ha cambiado la denominación de la titulación, de Ingeniería Informática a Grado en Ingeniería Informática; el proceso tradicional de exámenes para la evaluación del alumnado se ha transformado en evaluación continua de acuerdo al EEES, pero hemos adaptado el modelo de trabajo en equipo a los cambios normativos manteniendo esencialmente las mismas condiciones a lo largo de los sucesivos cursos en los que se ha desarrollado la experiencia.

Los equipos de trabajo, cada uno de ellos formado habitualmente por tres alumnos, desarrollan durante dos meses temas de estudio sobre Matemática Discreta que, o bien profundizan alguno de los temas estudiados en la materia, o bien analizan otros conceptos y aplicaciones que no tienen cabida en el desarrollo normal de un curso, pero permiten desarrollar aspectos complementarios útiles en la formación posterior del alumno.

Los resultados del trabajo de cada equipo se muestran en dos puntos fundamentalmente: (1) la elaboración de una memoria escrita sobre el tema elegido, con una extensión mínima de 15 a 20 páginas, y (2) la exposición pública en el aula durante 30 o 40 minutos aproximadamente, con evaluación de sus propios compañeros.

A continuación describimos con mayor detalle los objetivos, el desarrollo y los resultados obtenidos en la experiencia educativa.

OBJETIVOS

Los objetivos de la experiencia desarrollada son fundamentalmente los siguientes:

- (1) Desarrollo de competencias en trabajo colaborativo.
- (2) Aprendizaje de búsqueda bibliográfica
- (3) Desarrollo de técnicas de expresión escrita
- (4) Desarrollo de técnicas de expresión oral.

El trabajo en equipo o trabajo colaborativo constituye una de las formas habituales del trabajo en cualquier ámbito profesional. Sin embargo, se ha olvidado generalmente este tipo de actividades en la formación académica de los alumnos. Por ello se consideró desde el comienzo de esta experiencia docente que se debía incorporar este tipo de trabajo desde una materia de primer curso. Además en los nuevos grados, implantados en la Facultad de Informática desde el curso 2009-10, aparece como competencia transversal que se debe desarrollar a lo largo de los estudios de los alumnos.

El segundo objetivo propuesto es el aprendizaje de la búsqueda de fuentes bibliográficas. El uso (y abuso) de Internet ha modificado en gran medida dicha tarea. El alumno debe aprender a discernir entre la ingente cantidad de información de la que dispone al alcance de un solo clic, así como aprender a utilizar la bibliografía que se encuentra en la biblioteca tradicional. Naturalmente guiado por el profesor que le ayudará en la difícil tarea de elegir las fuentes adecuadas en cada ocasión.

Es frecuente encontrar en los exámenes escritos de las asignaturas de Matemáticas respuestas en las que sólo aparece una sucesión de símbolos y operaciones. Parece como si el alumno esperara que el profesor debiera interpretar sólo con esos símbolos la explicación a las respuestas solicitadas en los ejercicios. Es raro encontrar respuestas desarrolladas de forma coherente y precisa. No entraremos aquí en las razones de este fallo generalizado, pero sí nos sirve para comentar el tercer objetivo: el desarrollo de técnicas de expresión escrita. Con ello pretendemos que los alumnos aprendan a exponer por escrito los conocimientos adquiridos en el estudio de las fuentes bibliográficas del tema estudiado.

En este punto conviene ser cuidadoso para evitar la copia indiscriminada de párrafos completos obtenidos con toda facilidad en una búsqueda por la red.

Los alumnos presentan habitualmente cierto temor a expresarse en público ante sus compañeros, exponiendo la solución a un ejercicio, respondiendo a cuestiones planteadas en el desarrollo de una clase, etc. Este hecho nos lleva al cuarto objetivo: el desarrollo de técnicas de expresión oral. En Matemáticas se dice muchas veces que sólo se aprende a resolver problemas resolviendo problemas. Es decir, sólo la práctica continuada de una actividad conduce a la adquisición de ciertas habilidades para su correcta ejecución. Por ello consideramos que el alumno debe ejercitarse, de manera continua y constante, durante sus años de aprendizaje en la exposición oral de temas, trabajos o cualquier otro tipo cuestiones que le permitan ir adquiriendo paulatinamente las destrezas para la comunicación de las propias ideas.

DESARROLLO

El desarrollo del trabajo en equipo ha variado en los cuatro años de la experiencia. En la primera fase, durante los cursos 07-08 y 08-09 se actuó en un grupo de la asignatura Matemática Discreta de Ingeniería Informática. En aquellos años se realizaban tres controles parciales y un examen final. El peso de los controles en la calificación final era de un 40%. La experiencia del trabajo en equipo se realizó, de forma voluntaria por parte de los alumnos, sobre aquellos que habían obtenido una calificación de al menos 4 puntos en los dos primeros controles. El premio adicional que obtenían es que, si realizaban el trabajo de forma satisfactoria y aprobaban el tercer control, quedaban eximidos del examen final de la asignatura.

En esos dos cursos la experiencia fue gratificante, presentando los alumnos inmersos en ella un alto interés en su desarrollo. La calidad de los trabajos presentados fue satisfactoria en general con algunos verdaderamente excepcionales. Todos los alumnos participantes en la experiencia aprobaron la asignatura sin necesidad de realizar el examen final.

La segunda fase de la experiencia se realizó durante el curso 09-10 con alumnos del nuevo Grado en Ingeniería Informática (plan de Bolonia) y dentro de la asignatura Matemática Discreta I. En la correspondiente Guía Docente de la asignatura figuraba como elemento evaluador, con un 15% de la nota final, el trabajo en equipo. Por tanto, era obligado para todos los alumnos realizar el correspondiente trabajo. Desgraciadamente el grupo de alumnos en el que se realizó la experiencia comenzó sus actividades docentes la última semana de octubre porque, en su mayoría, eran alumnos que habían superado la Prueba de Acceso a la Universidad en la convocatoria de septiembre. Sus compañeros, matriculados en el mes de julio, habían comenzado su actividad docente en la primera semana de septiembre. Así el primer cuatrimestre quedaba reducido a ocho semanas en las que de forma intensiva se impartían sólo tres asignaturas a razón de ocho horas semanales para cada una de ellas. A pesar de las obvias

dificultades que presentaba esta compactación de esfuerzos, intentamos mantener la experiencia del trabajo en equipo en parecidas condiciones a los años anteriores. Pero, la falta material de tiempo para una correcta asimilación de conceptos e ideas junto con el abandono de las clases por parte de un considerable número de alumnos, malograron en gran medida la actividad en ese curso 2009-10

En el curso que ahora termina, 2010-11, hemos desarrollado la actividad en dos asignaturas diferentes correspondientes a los dos grados que se imparten en la Facultad de Informática.

En el primer cuatrimestre desarrollamos la experiencia en la asignatura Matemática Discreta II de segundo curso del Grado en Ingeniería Informática. Es una asignatura obligatoria de 3 créditos. El grupo en el que se desarrolló la experiencia era un grupo reducido, 29 alumnos, con sólo dos horas semanales de clase. La calificación del trabajo en equipo sumaba el 15% de la nota final, siendo satisfactorio el trabajo desarrollado por los alumnos en general. Tan sólo indicar las dificultades que encontramos para la exposición oral de los alumnos, porque las horas asignadas a la asignatura en horario reglado eran claramente insuficientes para dichas exposiciones.

En el segundo cuatrimestre hemos trabajado con los alumnos de la primera promoción del Grado en Matemáticas e Informática. La asignatura ha sido también Matemática Discreta II, pero aquí es obligatoria de 6 créditos con cinco horas semanales de docencia. Realizaron el trabajo en equipo 23 de los 30 alumnos matriculados, siendo la mayoría de los trabajos de calidad entre notable y sobresaliente.

Tras la descripción a grandes rasgos de los grupos, heterogéneos, de alumnos sobre los que se ha realizado la experiencia del trabajo en equipo, pasamos a describir las fases en que se ha desarrollado de modo uniforme, independientemente de las circunstancias diferentes de cada curso.

Las fases han sido las siguientes:

1. Asignación de trabajos.
2. Tutorías grupales.
3. Entrega de memorias escritas
4. Exposición oral ante los compañeros de curso.
5. Evaluación de cada alumno por sus compañeros.

Describimos a continuación y pormenorizadamente cada una de las fases.

(1) Asignación de trabajos.

Los alumnos, distribuidos en grupos de tres o excepcionalmente 4, eligen el trabajo que desean realizar entre los temas de una lista elaborada por el profesor de la asignatura.

Cada tema se entrega inicialmente con un guión muy breve para que los alumnos realicen una primera aproximación a su estudio durante una semana buscando fuentes bibliográficas. Después se les entrega un guión más estructurado junto con las

referencias y el material bibliográfico más adecuado a sus conocimientos.

Como ejemplo, enumeramos los temas propuestos en el primer y en el último año.

Curso 2007-08:

Criterios de primalidad. Ternas pitagóricas. Números de Stirling. Particiones de un entero. Números de Catalan. Números de Fibonacci. Árboles etiquetados. Coloración de grafos planos. Problema del Viajante, soluciones aproximadas. Estabilidad de emparejamientos. Problemas de Galerías de Arte. Problemas extremos en grafos. Cuadrados latinos.

Curso 2010-11: (Grado en Matemáticas e Informática)

Aquí enumeramos los temas con la descripción inicial que reciben los alumnos en su primera aproximación al tema.

1. SUCESIONES GRÁFICAS y DIGRÁFICAS

Caracterizaciones de las sucesiones correspondientes a grafos simples. Sucesiones correspondientes a digrafos. Caracterizaciones. Sucesiones que determinan diferentes tipos de grafos.

2. ENUMERACIÓN DE ÁRBOLES. TEOREMA DE CAYLEY

El número de árboles etiquetados de n vértices es n^{n-2} . Presentar varias demostraciones de este resultado de Cayley.

3. ÁRBOLES GENERADORES ÓPTIMOS

Estudio de árboles generadores de grafos optimizando criterios diferentes al peso: mínimo diámetro, máximo número de hojas, etc.

4. ÁRBOLES Y TRIANGULACIONES. NÚMEROS DE CATALAN

Relación entre triangulación de polígonos convexos, árboles binarios y sucesiones binarias.

5. RECONSTRUCCIÓN DE GRAFOS

La familia de subgrafos $G - \{v\}$ son las “cartas” de la “baraja de” un grafo G . ¿Se puede reconstruir G a partir de sus cartas?

6. RECORRIDOS EULERIANOS. APLICACIONES

Aplicaciones de los recorridos eulerianos al barrido de calles, reconstrucción de cadenas de ARN y telecomunicaciones. Algoritmos de construcción de recorridos eulerianos.

7. FÓRMULA DE EULER $C + V = A + 2$. Aplicaciones.

Estudio de algunas aplicaciones de esta fórmula. Poliedros regulares. Teorema de Pick. Rigidez de poliedros.

8. PARTICIONES DE UN ENTERO n

Particiones de n en k sumandos. Diagramas de Ferrers. Reglas de recurrencia. Particiones conjugadas. Particiones con sumandos distintos.

9. GRAFOS SOBRE SUPERFICIES NO PLANAS

Dibujo rectilíneo de un grafo planar. Grafos sobre un toro. Género de un grafo. Coloración de grafos sobre superficies.

10. NÚMEROS DE STIRLING

Expresión de polinomios en distintas bases. Descomposición de una permutación en ciclos. Números de Stirling de primera y segunda clase. Relaciones entre ellos. Números de Bell.

11. GRAFOS Y MUSEOS

El problema de la vigilancia de las “Galerías de Arte” y la coloración de triangulaciones. Itinerarios en un museo y caminos hamiltonianos.

12. COLORACIONES. MAPAS Y LISTAS

Todo mapa se puede colorear con 4 colores. Presentar dos demostraciones del “Teorema de los 5 colores”. Coloración por listas.

13. PROBLEMAS EXTREMALES EN GRAFOS

¿Cuántas aristas garantizan que un grafo de n vértices sea conexo? ¿Cuál es el máximo número de aristas de un grafo sin 3-ciclos? ¿Y sin 4-ciclos? ¿Y sin clanes de tamaño k ? Estudiar éstos y otros problemas extremos en grafos.

14. FACTORES EN UN GRAFO. “Instant Insanity”

El rompecabezas “Locura instantánea”. Factores y descomposiciones en un grafo.

15. ÁRBOLES DE STEINER.

El problema del “conector mínimo”. Estudiar los árboles de Steiner para grafos y para conjuntos de puntos en el plano.

16. PROBLEMA DEL VIAJANTE (TSP)

Un viajante de comercio desea visitar n ciudades volviendo al punto de partida. ¿Qué ruta debe seguir para minimizar la distancia total recorrida? Se deben estudiar algunas soluciones aproximadas a este problema (inserción, intercambio de aristas, vecino más próximo, ...)

17. TEORÍA ALGEBRAICA DE GRAFOS

El estudio algebraico de la matriz de adyacencia y de la laplaciana proporciona información sobre el grafo. ¿Qué relación hay entre los autovalores, el grado máximo, la independencia o la conectividad?

18. GRAFOS GEOMÉTRICOS DE PROXIMIDAD

Si los vértices de un grafo son puntos del plano y las aristas son segmentos tenemos un grafo geométrico. Sobre un conjunto de puntos S se pueden definir diferentes grafos que capturen la relación de proximidad entre los puntos. Se estudiarán las propiedades más importantes de algunos de estos grafos.

19. COLORACIONES ROBUSTA Y DEFECTIVA

Si al colorear un grafo se dispone de menos colores de los necesarios tenemos una coloración *defectiva*. La *robustez* de una coloración válida se mide por la tolerancia a la aparición de

nuevas aristas en el grafo. Se estudiarán las propiedades y aplicaciones de estas coloraciones de grafos.

20. FRACCIONES CONTINUAS

Expresión de un número racional como fracción continua. Cocientes parciales de un número real. Convergentes y aproximación. Fracciones continuas de π , ϕ , y e . Fracciones continuas para funciones.

21. EMPAREJAMIENTOS EN GRAFOS NO BIPARTIDOS

“Paths, trees and flowers”. Este es el sugerente título del artículo en que Edmonds describió su algoritmo para la construcción de un emparejamiento máximo en un grafo. Estudiar este algoritmo.

22. TEOREMA DE KURATOWSKI

Demostración del teorema de Kuratowski. Otras caracterizaciones de la planaridad.

23. CAMPEONATOS

Un campeonato en una orientación de un grafo completo. Caminos hamiltonianos en campeonatos. Sucesión de puntuaciones de un campeonato.

Como ejemplo del guión más estructurado que se entrega a los alumnos una semana después de la elección de tema, presentamos el correspondiente al tema 7.

7. FÓRMULA DE EULER $C+V=A+2$. Aplicaciones.

Un grafo G es **planar** si puede dibujarse en el plano de tal forma que las aristas no se corten. A dicha representación se le denomina grafo **plano**. Un dibujo de este tipo descompone el plano en un número finito de regiones conexas (incluyendo la región exterior) que se denominan caras.

La fórmula de Euler relaciona el número de vértices, aristas y caras de cualquier grafo plano.

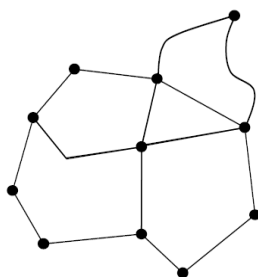


Figura 1.

Si G es un grafo plano, conexo, con V vértices, A aristas y

C caras, entonces $V - A + C = 2$.

El grafo plano de la figura 1 tiene 11 vértices, 15 aristas y 6 caras.

Este teorema tiene numerosas aplicaciones de las que algunas deben presentarse en el trabajo.

1. Poliedros regulares

Sólo existen 5 poliedros regulares

2. Poliedros con caras pentagonales y hexagonales

Todos tienen el mismo número de caras pentagonales, 12.

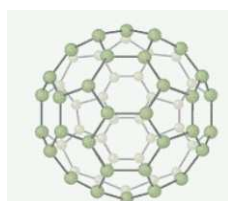


Figura 2.

En la figura 2 se representa una molécula del fullereno C_{60} que forma un poliedro con 12 caras pentagonales y 20 hexagonales.

3. Teorema de Pick

Si P es un polígono cuyos vértices tienen coordenadas enteras (como el de la figura 3), B es el número de puntos con coordenadas enteras en el borde de P e I es el número de puntos enteros en el interior del polígono, entonces el área A del polígono es:

$$A = I + \frac{B}{2} - 1$$

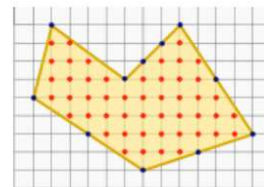


Figura 3.

4. Teorema de Sylvester

Dado cualquier conjunto de n puntos no alineados en el plano, siempre existe una recta que contiene exactamente a dos de los puntos.

Referencias

J. Matousek, J. Nešetřil: “Invitación a la Matemática Discreta”, Vicens Vives, 2008.

M. Aigner, G. Ziegler: “El libro de las demostraciones”, Nivola, 2005.

G. Hernández: “Grafos. Teoría y Algoritmos”. Pub. Facultad de Informática. UPM, 2006

Una vez asignado el tema y entregado un guión estructurado como el que presentamos como ejemplo, llega el momento del trabajo de los alumnos. Las siguientes fases son:

(2) Tutorías grupales.

Los alumnos deben presentar sus progresos en el desarrollo y comprensión del tema en dos ocasiones, al menos, ante el profesor. Estas reuniones sirven para resolver las dudas que inevitablemente deben surgir en el trabajo, tanto conceptuales sobre el tema como aquellas derivadas de la elaboración de la memoria escrita y de la subsiguiente presentación oral.

(3) Memorias escritas

Un par de días antes de la fecha fijada para el comienzo de las exposiciones orales todos los grupos deben entregar una memoria escrita de su trabajo. La memoria debe ser lo suficientemente extensa para que aparezcan expuestos todos los aspectos estudiados del tema con claridad y rigor, aproximadamente entre 15 y 20 páginas como mínimo. Naturalmente en los temas de Grafos el número de dibujos incluidos en la memoria influye fuertemente en su extensión.

(4) Exposiciones orales

Todos los grupos realizan una exposición oral del tema trabajado con una duración de 30 a 40 minutos ante sus compañeros de clase. Cada miembro expone una parte del trabajo y debe responder a las cuestiones o aclaraciones que se requieran para la comprensión por el resto de sus compañeros del tema expuesto. Los miembros del equipo son responsables

solidariamente de exposición y de las respuestas indicadas en el párrafo anterior.

La exposición oral se realiza utilizando las herramientas informáticas usuales para este tipo de presentaciones.

(5) Evaluación

La evaluación de los trabajos en equipo es doble. Como es normal el profesor de la asignatura evalúa la memoria escrita y la presentación oral. Pero además cada uno de los alumnos del curso evalúa la presentación oral de sus compañeros. La experiencia de los cuatro años demuestra que las calificaciones de los alumnos apenas difieren, en general, de la calificación otorgada por el profesor.

RESULTADOS Y CONCLUSIONES

En el momento de analizar los resultados de la experiencia docente se debe distinguir entre los dos primeros años y los dos últimos. En los primeros, como ya se ha dicho, sólo se trabajó con los alumnos que habían superado el filtro de los primeros controles de la asignatura. Por ello, los resultados fueron muy satisfactorios, superando la asignatura todos los alumnos que realizaron el trabajo en equipo.

El tercer año de la experiencia fue poco gratificante por las condiciones especiales en que se desarrolló, fundamentalmente falta de tiempo según se ha descrito anteriormente. De los 48 alumnos matriculados sólo 23 realizaron el trabajo en equipo. Y de ellos sólo 16 aprobaron la asignatura. La calidad de los trabajos fue, en general, manifiestamente inferior a los dos años anteriores.

Distingamos ahora en los resultados de este último año entre los alumnos del Grado en Ingeniería Informática y los alumnos del Grado en Matemáticas e Informática.

En el primer grupo, de 31 alumnos, realizaron el trabajo en equipo 20 alumnos, de los que aprobaron la asignatura 19. Hay que observar que la calificación del trabajo en equipo constituía el 15% de la calificación de la evaluación continua.

En cuanto a los alumnos del Grado de Matemáticas e Informática, 30 matriculados, realizaron el trabajo en equipo 23 de ellos. La calificación del trabajo constituía el 20% de la evaluación continua. Aprobaron la asignatura 16 alumnos.

Tras esta enumeración de resultados académicos mencionamos algunas de las cuestiones interesantes que subyacen a la realización de la experiencia. En primer lugar que esta experiencia comenzó antes de que los nuevos Planes de Estudio promovieran (o impusieran) este tipo de actividades docentes. En segundo lugar, la enorme variabilidad en el interés de los alumnos por este tipo de trabajos, desde el entusiasta hasta el que lo elabora en los últimos días, aunque en general la respuesta por parte del alumnado puede considerarse positiva.

Por otra parte ha sido extraordinariamente gratificante introducir a los alumnos interesados en problemas de investigación. Y mostrarles que, con los pocos conocimientos de un alumno de primer curso, pueden comprender alguno de sus resultados y primeras aproximaciones. Basta con esa pequeña muestra para continuar con este tipo de actividades en los próximos cursos.

Finalmente, unas palabras sobre “innovación” en la universidad [1], [2]. No he utilizado este término hasta ahora en la descripción del trabajo. Considero que el quehacer cotidiano de cualquier profesor universitario que se precie de serlo estriba en cambiar o modificar de forma continua su docencia anterior para mejorar la transmisión de conocimientos y conseguir el mejor aprendizaje de sus alumnos.

REFERENCIAS

- [1] J.C. Sánchez and R.L. Taylor, “La innovación educativa en la universidad española”, *Revista de Educación*, Vol. 48, pp. 101-118, (2005).
- [2] N. Láinez, *La importancia de innovar en los métodos educativos*, Editorial Paraninfo, Madrid, (2007).